

あちがく大好きさ

2019年度 号外 01



2年生冬期講習 1日目のまとめ

こんにちは！しもまっちです。

この冬休みの课外講習を4日間ほど担当することになりました。

よろしくお願いします。

「二次関数と直線」のところをやって欲しいと田村先生からオファーを

いただいたので、今回はその内容で実施していこうと思います。

デュークエリントンという偉大なジャズマンはこう言っています。It don't mean a thing if it ain't got that swing どんなジャズだって「スイングしなけりゃ意味ないよ」と。ならば私も言おう。「どんな授業だって楽しくなければ意味ないよ」と。

そういうわけで今回は、中学・高校の垣根を取っ払って、高度でありながらも、楽しい授業にしたいなと思っています。



$y = ax^2$ を切る直線の式

今回の講座の中心は、 $y = ax^2$ を切る直線

$$y = (\alpha + \beta)x - \alpha\beta$$

でしたね。とても覚えやすく美しい式です。

この式の導き方を次の図に示すような2つの方法で説明しましたね。

今回の講座の中心は、 $y = ax^2$ を切る直線 $y = (\alpha + \beta)x - \alpha\beta$ でしたね。とても覚えやすく美しい式です。この式の導き方を次の図に示すような2つの方法で説明しましたね。

方法1: 交点のx座標が α, β と仮定して、 $y = x^2$ と $y = \star$ (ABa式) の交点のx座標が α, β と仮定して、 $x^2 - \star = 0$ と $(x-\alpha)(x-\beta) = 0$ を比較すると、 $x = \alpha, \beta$ が一致する。よって $x^2 - \star = (x-\alpha)(x-\beta)$ となり、 $x^2 - \star = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ となる。よって $\star = (\alpha + \beta)x - \alpha\beta$ となる。

方法2: $A(\alpha, \alpha^2), B(\beta, \beta^2)$ を結ぶ直線の傾きは $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha} = \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{\beta - \alpha} = \alpha + \beta$ となる。よって ABa式 $y = (\alpha + \beta)x + b$ と $A(\alpha, \alpha^2) \in \text{直線}$ より $\alpha^2 = (\alpha + \beta)\alpha + b$ となる。よって $b = -\alpha\beta$ となる。よって ABa式は $y = (\alpha + \beta)x - \alpha\beta$ となる。

逆向きに考えていく

2つ目の解法を納得してもらおうのが、今回の私のミッションでした。次のように板書を整理してみました。確認してみてくださいね。

逆向きに考えていく

1 + 1 = 2 がわかる時は...

1 + 1 = □ かつ □ = 2

1 + □ = 2 かつ □ = 1

方法1: $y = x^2$ と $y = x + 2$ の交点を求める。 $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2, -1$ となる。よって $x^2 - \square = (x-2)(x+1)$ となる。よって $\square = x^2 - (x+2)(x-2) = x^2 - (x^2 - 4) = 4$ となる。よって $y = x + 2$ となる。

方法2: $A(2, 4), B(-1, 1)$ を結ぶ直線の傾きは $\frac{1 - 4}{-1 - 2} = \frac{-3}{-3} = 1$ となる。よって ABa式 $y = x + b$ と $A(2, 4) \in \text{直線}$ より $4 = 2 + b$ となる。よって $b = 2$ となる。よって $y = x + 2$ となる。

数学において普通の推論は「AとBがわかれば、それによってCがわかる」というように進むのですが、ここでは、「Aがわかり、Bがわからない。しかし結論のCがわかる」という時に、Bを求めると、「逆追いつ型」の考え方です。

ちょっとした発想の転換が必要です。でも、ここが理解できれば、数学のレベルがワンランクアップすると思いますよ。

参考までに3つの方法をまとめておきます。

例題: $A(-2, 4), B(1, 1)$ を結ぶ直線の式を求めよ。

解法1: 普通の方法
傾き $\frac{1 - 4}{1 - (-2)} = \frac{-3}{-3} = 1$
よって $y = x + b$ と $A(-2, 4) \in \text{直線}$ より $4 = -2 + b$ となる。よって $b = 6$ となる。よって $y = x + 6$ となる。

解法2: 公式
傾き $\frac{1 - 4}{1 - (-2)} = 1$
よって $y = x + b$ と $A(-2, 4) \in \text{直線}$ より $4 = -2 + b$ となる。よって $b = 6$ となる。よって $y = x + 6$ となる。

解法3: 差a法
傾き $\frac{1 - 4}{1 - (-2)} = 1$
よって $y = x + b$ と $A(-2, 4) \in \text{直線}$ より $4 = -2 + b$ となる。よって $b = 6$ となる。よって $y = x + 6$ となる。

係数があるときは要注意

$y = 2x^2$ のように、係数が1ではない時は注意が必要です。以下の板書で確認してください。

注: $y = 2x^2$ の場合、係数が1ではない時は注意が必要です。

$2x^2 = \square$ の解が $x = -1, 3$

$2x^2 - \square = 0$ の解が $x = -1, 3$

$x = -1, 3$ が解に存在する

注: $2x^2 - \square = 0$ は、必ず $x(x+1)(x-3) = 0$ の形に直す

x^2 の係数に注意すると $2x^2 - \square = 2(x+1)(x-3)$

よって $2x^2 - \square = 2(x+1)(x-3)$

$\square = 2x^2 - 2(x+1)(x-3)$

$\therefore y = 4x + 6$

最後に、応用を2つ取り上げましたね。これらは、高校で習う内容の先取りですが、「差の式」の考え方を高校できちんと教えている先生は少ないのではないかと思います。

差の式からの応用

例1 (接線): $y = x^2$ と $y = ?$ の接線の式を求めよ。

接点 $A(2, 4)$ を通る接線の式は $y = x^2 - (x-2)^2 = 4x - 4$

例2 (一般の二次関数): $y = x^2 - 4x + 7$ と $y = x + 3$ の交点を求めよ。

交点 $A(1, 4)$ を通る直線の式は $y = x + 3$

これで皆さんは超一流の中学生！

しもまっちのいい日記



先月、2年生が宮沢賢治記念館を訪問しました。その後、生徒たちが、それぞれの思いを1枚の絵にまとめて、ピブリアバトル風の発表会を行いました。今、みんなが描いた絵が廊下に展示されています。それぞれの作品、味があって素晴らしい！そして、全部並べてみると、何となく宮沢賢治の心象風景のようなものが迫ってくるように思います。

